ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, 2018, том 54, № 11, с. 1518–1532

ТЕОРИЯ УПРАВЛЕНИЯ

УДК 517.977.1

A-ОРБИТАЛЬНАЯ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ АФФИННЫХ СИСТЕМ

© 2018 г. Д. А. Фетисов

Рассматривается задача преобразования аффинной системы в линейную управляемую систему. Для аффинных систем с одним управлением вводится понятие A-орбитальной линеаризуемости, обобщающее известное для аффинных систем понятие орбитальной линеаризуемости на случай, когда используются замены независимой переменной, зависящие от управления. Доказывается необходимое и достаточное условие A-орбитальной линеаризуемости и предлагается алгоритм нахождения линеаризующих преобразований, основанный на построении производного ряда одного кораспределения, ассоциированного с исходной системой.

DOI: 10.1134/S0374064118110109

1. Введение. Постановка задачи. Рассмотрим аффинную систему

$$\dot{x} = f_0(x) + f_1(x)u, \tag{1}$$

где $x \in M$ – состояние, M – область в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$; $u \in \mathbb{R}$ – управление; $\dot{x} \equiv dx/dt$; f_0 и f_1 – гладкие векторные поля:

$$f_k = f_k^j \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad f_k^j \in C^\infty(M), \quad k = 0, 1, \quad j = \overline{1, n}.$$

Здесь и далее принято соглашение, что по повторяющимся индексам производится суммирование.

Решением системы (1) на промежутке $T \subset \mathbb{R}$ будем называть вектор-функцию $x(t) \in C^1(T)$, для которой существует такое управление $u(t) \in C(T)$, что при подстановке вектор-функции $x = x(t)$ и функции $u = u(t)$ в систему (1) получаем тождественное на промежутке T равенство.

Один из подходов к решению различных задач управления системой (1) основан на её преобразовании в линейную управляемую систему

$$\dot{y}^1 = y^2, \quad \ldots, \quad \dot{y}^{n-1} = y^n, \quad \dot{y}^n = v, \tag{2}$$

где $y = (y^1, \ldots, y^n) \in P$ – состояние; $v \in \mathbb{R}$ – управление; P – область в $\mathbb{R}^n$. Напомним, что если существуют функции α_0^1, $\alpha_1^1 \in C^\infty(M)$, $\alpha_1^1(x) \neq 0$, $x \in M$, и диффеоморфизм $\Phi\colon M \to P$ такие, что заменами состояния $y = \Phi(x)$ и управления $v = \alpha_0^1(x) + \alpha_1^1(x)u$ система (1) преобразуется на множестве M в систему (2), то систему (1) называют линеаризуемой обратной связью в области M. Одно из необходимых и достаточных условий [1] линеаризуемости системы (1) обратной связью в окрестности точки $x_0 \in M$ основано на построении последовательности распределений $\mathcal{S}_i = \operatorname{span}\{f_1, \operatorname{ad}_{f_0} f_1, \ldots, \operatorname{ad}_{f_0}^{i-1} f_1\}$, $i = 1, 2, \ldots,$ и состоит в выполнении двух требований: размерность распределения $\mathcal{S}_n$ в точке x_0 совпадает с размерностью системы (1) и распределение $\mathcal{S}_{n-1}$ инволютивно в окрестности точки x_0. В работах [2; 3, с. 183] приведены двойственные варианты необходимого и достаточного условия линеаризуемости обратной связью системы (1) и на их основе предложены [2; 3, с. 187] алгоритмы линеаризации. В формулировках указанных условий используется производный ряд системы Пфаффа, ассоциированной с системой (1). Условия линеаризуемости обратной связью системы (1) на заданном подмножестве пространства состояний можно найти в монографии [4, с. 287].

В работе [5] для решения задачи линеаризации системы (1) предложено использовать замены независимой переменной, не зависящие от управления. Переход в системе (1) на множестве M от независимой переменной t к независимой переменной τ, не зависящий от управления u, задаётся соотношением $\dot{\tau} = \alpha_0^0(x)$, где $\alpha_0^0 \in C^\infty(M)$, $\alpha_0^0(x) \neq 0$, $x \in M$. В результате система (1) преобразуется в аффинную систему

$$x' = \tilde{f}_0(x) + \tilde{f}_1(x)u,$$

где $\tilde{f}_0 = f_0/\alpha_0^0$, $\tilde{f}_1 = f_1/\alpha_0^0$, а штрих обозначает дифференцирование по τ. Свойства последовательности распределений $\tilde{\mathcal{S}}_i = \operatorname{span}\{\tilde{f}_1, \operatorname{ad}_{\tilde{f}_0}\tilde{f}_1, \ldots, \operatorname{ad}_{\tilde{f}_0}^{i-1}\tilde{f}_1\}$, $i = 1, 2, \ldots$, могут быть различными для разных функций α_0^0 и могут отличаться от свойств последовательности $\mathcal{S}_i$. В частности, может оказаться, что условия линеаризуемости обратной связью не выполняются для последовательности $\mathcal{S}_i$, но выполняются для последовательности $\tilde{\mathcal{S}}_i$ при некотором выборе функции α_0^0.

Систему (1) называют орбитально линеаризуемой в области M, если существуют функции α_0^0, α_0^1, $\alpha_1^1 \in C^\infty(M)$, $\alpha_0^0(x)\alpha_1^1(x) \neq 0$, $x \in M$, и диффеоморфизм $\Phi\colon\ M \to P$ такие, что заменами независимой переменной $\dot{\tau} = \alpha_0^0(x)$, управления $v = \alpha_0^1(x) + \alpha_1^1(x)u$ и состояния $y = \Phi(x)$ система (1) преобразуется на множестве M в линейную управляемую систему

$$(y^1)' = y^2, \quad \ldots, \quad (y^{n-1})' = y^n, \quad (y^n)' = v. \tag{3}$$

Система уравнений для нахождения такой функции α_0^0, что распределение $\tilde{\mathcal{S}}_{n-1}$ инволютивно в окрестности точки $x_0 \in M$, получена в работе [5]. Если существует решение α_0^0 этой системы и размерность соответствующего функции α_0^0 распределения $\tilde{\mathcal{S}}_n$ в точке x_0 равна n, то система (1) орбитально линеаризуема в окрестности точки x_0. Геометрические условия орбитальной линеаризуемости системы (1) установлены в работе [6]. В работе [7] разработан алгоритм орбитальной линеаризации системы (1), основанный на построении производного ряда системы Пфаффа, ассоциированной с системой (1). Геометрические условия орбитальной линеаризуемости систем с векторным управлением получены в работе [8].

В работе [9] показано, что использование замен независимой переменной, зависящих не только от состояния, но и от управления, позволяет линеаризовать аффинные системы, не линеаризуемые ни обратной связью, ни орбитально. Согласно [9], замена независимой переменной $\dot{\tau} = u + \alpha_0^0(x)$, $\alpha_0^0 \in C^\infty(M)$, и замена управления $v = 1/(u + \alpha_0^0(x))$ преобразуют систему (1) на множестве $M_{xu} = \{(x, u) : x \in M,\ u + \alpha_0^0(x) \neq 0\}$ в аффинную систему

$$x' = \hat{f}_0(x) + \hat{f}_1(x)v, \tag{4}$$

где $\hat{f}_0 = f_1$, $\hat{f}_1 = f_0 - \alpha_0^0 f_1$, $x \in M$, $v \neq 0$. Свойства последовательности распределений $\hat{\mathcal{S}}_i = \operatorname{span}\{\hat{f}_1, \operatorname{ad}_{\hat{f}_0}\hat{f}_1, \ldots, \operatorname{ad}_{\hat{f}_0}^{i-1}\hat{f}_1\}$, $i = 1, 2, \ldots$, могут быть различными для разных функций α_0^0 и отличаться от свойств последовательностей $\mathcal{S}_i$ и $\tilde{\mathcal{S}}_i$. В частности, может оказаться, что условия линеаризуемости обратной связью не выполняются для последовательностей $\mathcal{S}_i$ и $\tilde{\mathcal{S}}_i$, но при некотором выборе функции α_0^0 выполнены для последовательности $\hat{\mathcal{S}}_i$. В работе [9] получена система уравнений для нахождения такой функции α_0^0, что распределение $\hat{\mathcal{S}}_{n-1}$ является инволютивным в окрестности точки x_0. Если такая функция α_0^0 существует и соответствующее этой функции распределение $\hat{\mathcal{S}}_n$ имеет размерность n в точке x_0, то в некоторой окрестности точки x_0 система (4) линеаризуема обратной связью.

Расширим множество рассматриваемых преобразований системы (1): покажем, что каждая 2×2-матрица

$$A(x) = \begin{pmatrix} \alpha_0^0(x) & \alpha_1^0(x) \\ \alpha_0^1(x) & \alpha_1^1(x) \end{pmatrix}, \quad \alpha_j^i \in C^\infty(M), \quad i, j = 0, 1, \tag{5}$$

невырожденная в области M, определяет преобразование аффинной системы (1) в некоторую аффинную систему. Это преобразование индуцировано заменой независимой переменной

$$\dot{\tau} = \alpha_0^0(x) + \alpha_1^0(x)u \tag{6}$$

и заменой управления
$$v = \frac{\alpha_0^1(x) + \alpha_1^1(x)u}{\alpha_0^0(x) + \alpha_1^0(x)u}. \tag{7}$$

Лемма. *Для любой матрицы (5), невырожденной в области M, система (1) заменой независимой переменной (6) и заменой управления (7) преобразуется на множестве $M_{xu} = \{(x,u) : x \in M,\ \ \alpha_0^0(x) + \alpha_1^0(x)u \neq 0\}$ в аффинную систему*
$$x' = g_0(x) + g_1(x)v, \tag{8}$$
определённую на множестве $M_{xv} = \{(x,v) : x \in M,\ \ \alpha_1^1(x) - \alpha_1^0(x)v \neq 0\}$, где векторные поля g_0, g_1 выражаются через векторные поля f_0, f_1 следующим образом:
$$\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \end{pmatrix} = (A^{-1})^{\mathrm{т}} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Выполняя в системе (1) на множестве M_{xu} замену независимой переменной (6), получаем нелинейную систему
$$x' = \frac{f_0(x) + f_1(x)u}{\alpha_0^0(x) + \alpha_1^0(x)u}. \tag{9}$$

Перейдём в системе (9) на множестве M_{xu} от управления u к управлению v по формуле (7). Замена управления (7) на множестве M_{xu} обратима, исходное управление u выражается через новое управление v по формуле
$$u = \frac{\alpha_0^0(x)v - \alpha_0^1(x)}{\alpha_1^1(x) - \alpha_1^0(x)v}. \tag{10}$$

Подставив выражение (10) в систему (9), придём к аффинной системе (8). Лемма доказана.

Будем называть аффинную систему (1) A-орбитально линеаризуемой в области M, если существуют матрица (5), невырожденная в области M, и диффеоморфизм $\Phi\colon\ M \to P$ такие, что система (1) заменой независимой переменной (6), заменой управления (7) и заменой состояния $y = \Phi(x)$ преобразуется на множестве $M_{xu} = \{(x,u) : x \in M,\ \ \alpha_0^0(x) + \alpha_1^0(x)u \neq 0\}$ в линейную управляемую систему (3), определённую на множестве $M_{yv} = \{(y,v) : y \in P,\ \alpha_1^1(x) - \alpha_1^0(x)v \neq 0,\ \ x = \Phi^{-1}(y)\}$.

Пусть система (1) A-орбитально линеаризуема в области M. В этом случае связь между решениями систем (3) и (1) описывается следующим образом. Пусть $y(\tau)$ – решение системы (3), соответствующее управлению $v(\tau)$ и удовлетворяющее условию $y(\tau_0) = y_0 \in P$. Предположим, что $(y(\tau), v(\tau)) \in M_{yv}$ при всех τ из некоторого интервала T_y, содержащего точку τ_0. Введём обозначения:
$$\rho(\tau) = \Phi^{-1}(y(\tau)), \quad \sigma(\tau) = \frac{\alpha_0^0(x)v(\tau) - \alpha_0^1(x)}{\alpha_1^1(x) - \alpha_1^0(x)v(\tau)}\bigg|_{x=\rho(\tau)}.$$

Подставим вектор-функцию $x = \rho(\tau)$ и функцию $u = \sigma(\tau)$ в соотношение (6). В результате получим уравнение
$$\dot\tau = \frac{\det A(x)}{\alpha_1^1(x) - \alpha_1^0(x)v(\tau)}\bigg|_{x=\rho(\tau)}.$$

Пусть $\tau(t)$ – решение этого уравнения, удовлетворяющее условию $\tau(t_0) = \tau_0$, а T_x – какой-либо интервал, содержащий точку t_0, такой, что $\tau(t) \in T_y$ при $t \in T_x$. Тогда $x = \rho(\tau(t))$ – решение системы (1), соответствующее управлению $u = \sigma(\tau(t))$ и удовлетворяющее условию $x(t_0) = \Phi^{-1}(y_0)$. При этом $(\rho(\tau(t)), \sigma(\tau(t))) \in M_{xu}$ для всех $t \in T_x$.

Обратно, пусть $x(t)$ – решение системы (1), соответствующее управлению $u(t)$ и удовлетворяющее условию $x(t_0) = x_0 \in M$. Пусть $(x(t), u(t)) \in M_{xu}$ для всех t из некоторого интервала T_x, содержащего точку t_0. Обозначим через $t(\tau)$ решение уравнения

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\alpha_0^0(x(t)) + \alpha_1^0(x(t))u(t)},$$

удовлетворяющее условию $t(\tau_0) = t_0$. Пусть T_y – какой-либо интервал, содержащий точку τ_0, такой, что $t(\tau) \in T_x$ при $\tau \in T_y$. Тогда $y = \Phi(x(t(\tau)))$ – решение системы (3), удовлетворяющее условию $y(\tau_0) = \Phi(x_0)$ и соответствующее управлению $v = \mu(\tau)$, где

$$\mu(\tau) = \frac{\alpha_0^1(x(t)) + \alpha_1^1(x(t))u(t)}{\alpha_0^0(x(t)) + \alpha_1^0(x(t))u(t)}\bigg|_{t=t(\tau)}.$$

Отметим, что $(\Phi(x(t(\tau))), \mu(\tau)) \in M_{yv}$ для всех $\tau \in T_y$.

Цель настоящей работы – получить условия A-орбитальной линеаризуемости системы (1) в окрестности точки $x_0 \in M$ и разработать алгоритм построения линеаризующих преобразований.

2. Вспомогательные сведения. Пусть в $\mathbb{R}^n$ фиксирована система координат $(x^1, \ldots, x^n)$ и Q – область в $\mathbb{R}^n$. Через $\Lambda^1(Q)$ будем обозначать множество гладких дифференциальных 1-форм, заданных в области Q. Семейство гладких дифференциальных 1-форм $\omega^1, \ldots, \omega^m \in \Lambda^1(Q)$, заданных разложением $\omega^i = \omega^i_j dx^j$, $i = \overline{1, m}$, по базису $dx^1, \ldots, dx^n$, назовём *линейно несвязанным* в области Q, если в каждой точке $x \in Q$ выполнено равенство

$$\operatorname{Rg}(\omega^i_j(x))^{i=\overline{1,m}}_{j=\overline{1,n}} = m.$$

Систему функций $y^1, \ldots, y^m \in C^\infty(Q)$ назовём *независимой* в окрестности точки $x_0 \in Q$, если в точке x_0 справедливо равенство

$$\operatorname{Rg}\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)^{i=\overline{1,m}}_{j=\overline{1,n}} = m.$$

Пусть $\mathcal{K}$ – гладкое кораспределение, заданное в области Q. Положим

$$\mathcal{K}_1 = \mathcal{K}, \quad \mathcal{K}_{i+1} = \{\omega \in \mathcal{K}_i : d\omega \equiv 0 \mod \mathcal{K}_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

где через $d\omega$ обозначен внешний дифференциал формы ω. Последовательность

$$\mathcal{K}_1 \supset \mathcal{K}_2 \supset \mathcal{K}_3 \supset \ldots \tag{11}$$

называют *производным рядом кораспределения* $\mathcal{K}$. Точку x_0 называют *регулярной точкой* производного ряда (11), если x_0 – регулярная точка каждого из кораспределений $\mathcal{K}_i$, $i = 1, 2, \ldots$ Если x_0 – регулярная точка производного ряда (11), то ряд (11) называют *производным кофлагом кораспределения* $\mathcal{K}$. В этом случае существует номер N такой, что $\mathcal{K}_N = \mathcal{K}_{N+1}$. Наименьший номер N, для которого $\mathcal{K}_N = \mathcal{K}_{N+1}$, называют *длиной производного кофлага* (11). Производный ряд (11) в окрестности своей регулярной точки x_0, таким образом, имеет вид

$$\mathcal{K}_1 \supset \mathcal{K}_2 \supset \ldots \supset \mathcal{K}_N = \mathcal{K}_{N+1}.$$

Кораспределение $\mathcal{K} : x \in Q \mapsto \{0\}$ называют тривиальным и записывают как $\mathcal{K} = \mathcal{O}$.

Напомним понятие *характеристического кораспределения* для регулярного кораспределения $\mathcal{K}$. Для дифференциальной формы $\omega = \omega_i dx^i \in \Lambda^1(Q)$ введём обозначение

$$\omega_{ij} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}, \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Предположим, что семейство форм $\omega^1, \ldots, \omega^m$ является линейно несвязанным в окрестности точки $x_0 \in Q$. Рассмотрим систему Пфаффа

$$\omega^k = \omega^k_i dx^i = 0, \quad k = \overline{1,m}, \tag{12}$$

и порождаемое этой системой кораспределение $\mathcal{K} = \operatorname{span}\{\omega^1, \ldots, \omega^m\}$. Характеристической системой системы (12) называют систему Пфаффа, образованную уравнениями (12) и уравнениями

$$\omega^k_{i[j}\omega^1_{j_1} \ldots \omega^m_{j_m]} dx^i = 0, \quad k = \overline{1,m}, \quad 1 \le j < j_1 < \ldots < j_m \le n, \tag{13}$$

где по индексам, заключённым в квадратных скобках, производится альтернирование. Кораспределение $\mathcal{CK}$, порождённое характеристической системой (12), (13), называют характеристическим кораспределением кораспределения $\mathcal{K}$. Размерность характеристического кораспределения $\mathcal{CK}$ в точке x_0 называют классом кораспределения $\mathcal{K}$ в точке x_0 и обозначают $\operatorname{class}\mathcal{K}(x_0)$. Известно, что если x_0 – регулярная точка кораспределения $\mathcal{CK}$, то в окрестности точки x_0 кораспределение $\mathcal{CK}$ вполне интегрируемо. В окрестности регулярной точки x_0 характеристического кораспределения $\mathcal{CK}$ класс кораспределения $\mathcal{K}$ совпадает с наименьшим числом переменных, с помощью которых в окрестности точки x_0 может быть записана система Пфаффа (12), а сами эти переменные могут быть найдены как система независимых интегралов характеристического кораспределения $\mathcal{CK}$.

Остановимся подробнее на важном частном случае $m = 1$. Система Пфаффа (12) в этом случае представляет собой уравнение

$$\omega = \omega_i dx^i = 0. \tag{14}$$

Будем предполагать, что хотя бы для одного индекса i выполнено неравенство $\omega_i(x_0) \ne 0$. В этом случае порождаемое уравнением (14) кораспределение $\mathcal{K} = \operatorname{span}\{\omega\}$ одномерно в окрестности точки x_0. Характеристическая система для уравнения (14) принимает вид

$$\omega_i dx^i = 0, \quad \omega_{i[j}\omega_{j_1]} dx^i = 0, \quad 1 \le j < j_1 \le n. \tag{15}$$

Известно [10, с. 120], что размерность характеристического кораспределения $\mathcal{CK}$ одномерного кораспределения $\mathcal{K}$ всегда нечётна. Если характеристическое кораспределение $\mathcal{CK}$ регулярно в окрестности точки x_0, то уравнение (14) в этой окрестности эквивалентно уравнению

$$dz^1 - z^2 dz^3 - z^4 dz^5 - \ldots - z^{2l} dz^{2l+1} = 0.$$

Здесь число $2l+1$ является размерностью характеристического кораспределения $\mathcal{CK}$ и классом кораспределения $\mathcal{K}$, а $z^1, \ldots, z^{2l+1}$ – полная система независимых интегралов характеристического кораспределения $\mathcal{CK}$. Класс одномерного кораспределения $\mathcal{K}$ удобно искать, используя следующее утверждение [3, с. 90]: если для некоторого натурального числа l в точке $x_0 \in Q$ выполняются соотношения $(d\omega)^l \wedge \omega \ne 0$, $(d\omega)^{l+1} \wedge \omega = 0$, то $\operatorname{class}\mathcal{K}(x_0) = 2l+1$.

Отметим, что при сделанных предположениях относительно уравнения (14) характеристическая система (15) приводится к виду [10, с. 119]

$$\omega_{ij} dx^j = \omega_i \lambda, \quad i = \overline{1,n}, \quad \omega_j dx^j = 0. \tag{16}$$

Исключив функцию λ из системы (16), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Проинтегрировав её, найдём полную систему независимых интегралов характеристического кораспределения $\mathcal{CK}$.

3. Необходимое и достаточное условие A-орбитальной линеаризуемости. Рассмотрим вопрос о существовании такой окрестности точки $x_0 \in M$, в которой система (1) A-орбитально линеаризуема. Системе (1) соответствует система Пфаффа

$$\tilde{\omega}^i = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{17}$$

где $\tilde{\omega}^i = dx^i - f_0^i(x)\,dt - f_1^i(x)u\,dt$, $i = \overline{1,n}$. Система (17) порождает кораспределение $\mathcal{J} = \operatorname{span}\{\tilde{\omega}^1, \ldots, \tilde{\omega}^n\}$, определённое на множестве $M \times \mathbb{R}^2$ с координатами $x^1, \ldots, x^n, t, u$.

Введём в рассмотрение кораспределение $\mathcal{I} = \{\omega \in \mathcal{J} : \omega(f_0) = 0,\ \omega(f_1) = 0\}$ и установим его вид. Будем искать формы из $\mathcal{J}$, принадлежащие $\mathcal{I}$, в виде

$$\omega = \beta_i \tilde{\omega}^i = \beta_i dx^i - \beta_i (f_0^i(x) + f_1^i(x)u)\,dt,$$

где функции $\beta_1, \ldots, \beta_n$ подлежат определению. Подставляя эти выражения в равенства $\omega(f_0) = 0$, $\omega(f_1) = 0$, получаем

$$\beta_i dx^i \biggl(f_k^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}\biggr) - \beta_i (f_0^i(x) + f_1^i(x)u)\,dt \biggl(f_k^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}\biggr) = 0, \quad k = 0, 1.$$

Поскольку

$$dx^i \biggl(\frac{\partial}{\partial x^j}\biggr) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad dt \biggl(\frac{\partial}{\partial x^j}\biggr) = 0, \quad i, j = \overline{1,n},$$

приходим к системе двух линейных алгебраических уравнений

$$\beta_i f_0^i(x) = 0, \quad \beta_i f_1^i(x) = 0. \tag{18}$$

Пусть $\beta^1, \ldots, \beta^m$ – фундаментальная система решений системы (18). Тогда кораспределение $\mathcal{I}$ порождается дифференциальными формами

$$\omega^j = \beta_i^j \tilde{\omega}^i = \beta_i^j (dx^i - f_0^i(x)\,dt - f_1^i(x)u\,dt) = \beta_i^j dx^i, \quad j = \overline{1,m}.$$

Таким образом, $\mathcal{I} : x \in M \mapsto \operatorname{span}\{\beta_i^1(x)dx^i, \ldots, \beta_i^m(x)dx^i\}$.

Отметим, что кораспределение $\mathcal{I}$ можно построить, исключив dt и $u\,dt$ из системы Пфаффа (17) и записав полученную после исключения систему в виде $\omega^j = 0$, $j = \overline{1,m}$. Тогда формы $\omega^1, \ldots, \omega^m$ являются порождающими для кораспределения $\mathcal{I}$.

Докажем условие A-орбитальной линеаризуемости системы (1) в окрестности точки x_0. С этой целью составим производный ряд кораспределения $\mathcal{I}$:

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}, \quad \mathcal{I}_{k+1} = \{\omega \in \mathcal{I}_k : d\omega \equiv 0 \mod \mathcal{I}_k\}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{19}$$

Если x_0 – регулярная точка ряда (19), то ряд (19) превращается в производный кофлаг

$$\mathcal{I}_1 \supset \mathcal{I}_2 \supset \mathcal{I}_3 \supset \ldots \supset \mathcal{I}_N = \mathcal{I}_{N+1}, \tag{20}$$

где N – длина кофлага.

Главным результатом настоящей работы является

Теорема. *Пусть $x_0 \in M$ – регулярная точка производного ряда (19). Система (1) A-орбитально линеаризуема в окрестности точки x_0 тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

1) в некоторой окрестности точки x_0 выполнено равенство $N = n - 1$, где N – длина производного кофлага (20);

2) $\mathcal{C}\mathcal{I}_{n-2}(x_0) \not\subset \mathcal{I}(x_0)$.

Доказательство. Достаточность. Покажем сначала, что в некоторой окрестности точки x_0 выполнено равенство $\dim \mathcal{I} = n - 2$. Поскольку размерность кораспределения $\mathcal{I}$ совпадает с размерностью пространства решений системы линейных алгебраических уравнений (18), то $\dim \mathcal{I} \geq n - 2$. Предположив, что $\dim \mathcal{I} > n - 2$, придём к неравенству $\dim \operatorname{span}\{f_0, f_1\} < 2$. Очевидно, что в этом случае распределение $\operatorname{span}\{f_0, f_1\}$ инволютивно и, следовательно, кораспределение $\mathcal{I}$ вполне интегрируемо. Согласно теореме Фробениуса, это означает, что $d\omega \equiv 0 \mod \mathcal{I}$ для всех форм $\omega \in \mathcal{I}$. Отсюда следует, что в окрестности точки x_0 выполнены равенства $\mathcal{I}_2 = \mathcal{I}_1$ и $N = 1$, а это противоречит условию теоремы.

Из равенств $\dim \mathcal{I} = n-2$ и $N = n-1$ вытекает, что для любого номера $k = \overline{1, n-1}$ в окрестности точки x_0 выполнено равенство $\dim \mathcal{I}_k = n-k-1$. В частности, $\dim \mathcal{I}_{n-2} = 1$ и $\dim \mathcal{I}_{n-3} = 2$.

Покажем теперь, что $\operatorname{class} \mathcal{I}_{n-2} = 3$ в некоторой окрестности точки x_0. Обозначим базисную форму кораспределения $\mathcal{I}_{n-2}$ через γ^1. Так как $\gamma^1 \notin \mathcal{I}_{n-1}$, то $d\gamma^1 \wedge \gamma^1 \neq 0$. Пусть кораспределение $\mathcal{I}_{n-3}$ порождается, помимо формы γ^1, некоторой формой γ^2. Из сравнения $d\gamma^1 \equiv 0 \mod \mathcal{I}_{n-3}$ вытекает, что внешний дифференциал формы γ^1 можно представить в виде $d\gamma^1 = a^1 \wedge \gamma^1 + a^2 \wedge \gamma^2$, где a^1 и a^2 – некоторые гладкие дифференциальные 1-формы. Отсюда следует равенство

$$(d\gamma^1)^2 \wedge \gamma^1 = 2a^1 \wedge \gamma^1 \wedge a^2 \wedge \gamma^2 \wedge \gamma^1 = 0.$$

Полученный результат означает, что $\operatorname{class} \mathcal{I}_{n-2} = 3$ в некоторой окрестности точки x_0. Таким образом, $\mathcal{I}_{n-2}$ в окрестности точки x_0 является одномерным кораспределением класса 3. Следовательно, существуют независимые функции z^1, z^2, z^3, с помощью которых кораспределения $\mathcal{CI}_{n-2}$ и $\mathcal{I}_{n-2}$ запишутся в окрестности точки x_0 в виде $\mathcal{CI}_{n-2} = \operatorname{span}\{dz^1, dz^2, dz^3\}$, $\mathcal{I}_{n-2} = \operatorname{span}\{\omega^2\}$, где $\omega^2 = dz^1 - z^2 dz^3$. Введём обозначения:

$$\overline{z}^1 = \begin{cases} z^1 + C, & dz^3(x_0) \notin \mathcal{I}(x_0), \\ z^1 - z^2 z^3 + C, & dz^3(x_0) \in \mathcal{I}(x_0), \end{cases} \quad \overline{z}^2 = \begin{cases} z^2, & dz^3(x_0) \notin \mathcal{I}(x_0), \\ -z^3, & dz^3(x_0) \in \mathcal{I}(x_0), \end{cases} \tag{21}$$

$$\overline{z}^3 = \begin{cases} z^3, & dz^3(x_0) \notin \mathcal{I}(x_0), \\ z^2, & dz^3(x_0) \in \mathcal{I}(x_0), \end{cases} \tag{22}$$

где $C \in \mathbb{R}$ – любое число, выбранное так, чтобы выполнялось неравенство $\overline{z}^1(x_0) \neq 0$. Поскольку $\mathcal{CI}_{n-2}(x_0) \not\subset \mathcal{I}(x_0)$, то из принадлежности 1-формы $dz^3(x_0)$ подпространству $\mathcal{I}(x_0)$ следует, что $dz^2(x_0) \notin \mathcal{I}(x_0)$. Отсюда вытекает, что $d\overline{z}^3(x_0) \notin \mathcal{I}(x_0)$. В переменных $\overline{z}^1$, $\overline{z}^2$, $\overline{z}^3$ форма ω^2 запишется в виде

$$\omega^2 = d\overline{z}^1 - \overline{z}^2 d\overline{z}^3.$$

Отметим, что функции $\overline{z}^1$, $\overline{z}^2$, $\overline{z}^3$ независимы в окрестности точки x_0. В случае, если $dz^3(x_0) \in \mathcal{I}(x_0)$, это следует из равенства $d\overline{z}^1 \wedge d\overline{z}^2 \wedge d\overline{z}^3 = dz^1 \wedge dz^2 \wedge dz^3$ и независимости функций z^1, z^2, z^3 в окрестности точки x_0.

Введём обозначения:

$$y^1 = \overline{z}^3, \quad y^2 = \overline{z}^1, \quad y^3 = \overline{z}^1 \overline{z}^2. \tag{23}$$

Из независимости функций $\overline{z}^1$, $\overline{z}^2$, $\overline{z}^3$ в окрестности точки x_0 и неравенства $\overline{z}^1(x_0) \neq 0$ следует, что

$$dy^1 \wedge dy^2 \wedge dy^3 = d\overline{z}^3 \wedge d\overline{z}^1 \wedge d(\overline{z}^1 \overline{z}^2) = d\overline{z}^3 \wedge d\overline{z}^1 \wedge \overline{z}^1 d\overline{z}^2 \neq 0,$$

поэтому функции y^1, y^2, y^3 независимы в окрестности точки x_0. В переменных y^1, y^2, y^3 форма ω^2 принимает вид

$$\omega^2 = dy^2 - \frac{y^3}{y^2} dy^1,$$

а кораспределение $\mathcal{I}_{n-2}$ – вид

$$\mathcal{I}_{n-2} = \operatorname{span}\left\{dy^2 - \frac{y^3}{y^2} dy^1\right\}. \tag{24}$$

Отметим, что $dy^1(x_0) \notin \mathcal{I}(x_0)$ и $y^2(x_0) \neq 0$.

Покажем по индукции, что для всех $k = \overline{n-1, 2}$ кораспределения $\mathcal{I}_{k-1}$ представимы в виде

$$\mathcal{I}_{k-1} = \operatorname{span}\left\{dy^2 - \frac{y^3}{y^2}\, dy^1, \ldots, dy^{n-k+1} - \frac{y^{n-k+2}}{y^2}\, dy^1\right\}, \tag{25}$$

где функции $y^1, \ldots, y^{n-k+2}$ независимы в окрестности точки x_0. Для случая $k = n-1$ справедливость доказываемого утверждения уже установлена. Предположим, что для некоторого номера $k \in \{2, \ldots, n-2\}$ кораспределение $\mathcal{I}_k$ представлено в виде

$$\mathcal{I}_k = \operatorname{span}\left\{dy^2 - \frac{y^3}{y^2}\,dy^1, \ldots, dy^{n-k} - \frac{y^{n-k+1}}{y^2}\,dy^1\right\},$$

где функции $y^1, \ldots, y^{n-k+1}$ независимы в окрестности точки x_0. Покажем, что кораспределение $\mathcal{I}_{k-1}$ представимо в виде (25). Как установлено выше, размерность кораспределения $\mathcal{I}_{k-1}$ на единицу больше размерности кораспределения $\mathcal{I}_k$, поэтому базисными формами кораспределения $\mathcal{I}_{k-1}$ являются базисные формы

$$\omega^2 = dy^2 - \frac{y^3}{y^2}\,dy^1, \quad \ldots, \quad \omega^{n-k} = dy^{n-k} - \frac{y^{n-k+1}}{y^2}\,dy^1$$

кораспределения $\mathcal{I}_k$ и некоторая форма $\hat{\omega}^{n-k+1}$. Из условия $d\omega^{n-k} \equiv 0 \bmod \mathcal{I}_{k-1}$ следует равенство

$$d\omega^{n-k} \wedge \omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^{n-k} \wedge \hat{\omega}^{n-k+1} = 0. \tag{26}$$

Поскольку внешний дифференциал формы ω^{n-k} задаётся выражением

$$d\omega^{n-k} = -\frac{1}{y^2}\,dy^{n-k+1} \wedge dy^1 + \frac{y^{n-k+1}}{(y^2)^2}\,dy^2 \wedge dy^1,$$

из равенства (26) получаем соотношение

$$\left(-\frac{1}{y^2}\,dy^{n-k+1} \wedge dy^1 + \frac{y^{n-k+1}}{(y^2)^2}\,dy^2 \wedge dy^1\right) \wedge \left(dy^2 - \frac{y^3}{y^2}\,dy^1\right) \wedge \ldots \wedge \left(dy^{n-k} - \frac{y^{n-k+1}}{y^2}\,dy^1\right) \wedge \hat{\omega}^{n-k+1} = 0,$$

которое преобразуется к виду $dy^{n-k+1} \wedge dy^1 \wedge dy^2 \wedge \ldots \wedge dy^{n-k} \wedge \hat{\omega}^{n-k+1} = 0$. Отсюда вытекает, что $\hat{\omega}^{n-k+1} = b_i dy^i$, $i = \overline{1, n-k+1}$, где $b_1, \ldots, b_{n-k+1}$ – некоторые гладкие функции. Покажем, что $b_{n-k+1}(x_0) \neq 0$. Так как

$$dy^i = \omega^i + \frac{y^{i+1}}{y^2} dy^1, \quad i = \overline{2, n-k},$$

то

$$\hat{\omega}^{n-k+1} = \hat{b}_1 dy^1 + b_i \omega^i + b_{n-k+1} dy^{n-k+1}, \quad i = \overline{2, n-k}, \tag{27}$$

где

$$\hat{b}_1 = b_1 + b_2 \frac{y^3}{y^2} + \ldots + b_{n-k} \frac{y^{n-k+1}}{y^2}.$$

Если $b_{n-k+1}(x_0) = 0$, то в силу соотношения (27) 1-формы $dy^1(x_0)$, $\omega^2(x_0), \ldots, \omega^{n-k}(x_0)$, $\hat{\omega}^{n-k+1}(x_0)$ линейно зависимы. Поскольку 1-формы $\omega^2(x_0), \ldots, \omega^{n-k}(x_0)$, $\hat{\omega}^{n-k+1}(x_0)$ линейно независимы, имеем

$$dy^1(x_0) \in \operatorname{span}\{\omega^2(x_0), \ldots, \omega^{n-k}(x_0), \hat{\omega}^{n-k+1}(x_0)\} = \mathcal{I}_{k-1}(x_0) \subset \mathcal{I}(x_0).$$

Из полученного противоречия следует, что $b_{n-k+1}(x_0) \neq 0$. Введём в рассмотрение форму

$$\omega^{n-k+1} = \frac{1}{b_{n-k+1}}(\hat{\omega}^{n-k+1} - b_i \omega^i), \quad i = \overline{2, n-k},$$

которая в силу соотношений (27) имеет вид

$$\omega^{n-k+1} = dy^{n-k+1} + \frac{\hat{b}_1}{b_{n-k+1}}\,dy^1 = dy^{n-k+1} - \frac{y^{n-k+2}}{y^2}\,dy^1,$$

где обозначено $y^{n-k+2} = -\hat{b}_1 y^2 / b_{n-k+1}$. Осталось отметить, что кораспределение $\mathcal{I}_{k-1}$ после замены в его базисе формы $\hat{\omega}^{n-k+1}$ на форму ω^{n-k+1} принимает вид (25).

Покажем, что функции $y^1, \ldots, y^{n-k+2}$ независимы в окрестности точки x_0. Предположим противное. Тогда выполняется равенство $dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^{n-k+1} \wedge dy^{n-k+2} = 0$. Поскольку внешний дифференциал формы ω^{n-k+1} задаётся выражением

$$d\omega^{n-k+1} = -\frac{1}{y^2}\,dy^{n-k+2} \wedge dy^1 + \frac{y^{n-k+2}}{(y^2)^2}\,dy^2 \wedge dy^1,$$

то

$$d\omega^{n-k+1} \wedge \omega^2 \wedge \ldots \wedge \omega^{n-k+1} =$$

$$= \biggl(-\frac{1}{y^2}\,dy^{n-k+2} \wedge dy^1 + \frac{y^{n-k+2}}{(y^2)^2}\,dy^2 \wedge dy^1\biggr) \wedge \biggl(dy^2 - \frac{y^3}{y^2}\,dy^1\biggr) \wedge \ldots \wedge \biggl(dy^{n-k+1} - \frac{y^{n-k+2}}{y^2}\,dy^1\biggr) =$$

$$= -\frac{1}{y^2}\,dy^{n-k+2} \wedge dy^1 \wedge dy^2 \wedge \ldots \wedge dy^{n-k+1} = 0.$$

Отсюда следует, что $d\omega^{n-k+1} \equiv 0 \bmod \mathcal{I}_{k-1}$ и $\omega^{n-k+1} \in \mathcal{I}_k$. Из полученного противоречия вытекает независимость функций $y^1, \ldots, y^{n-k+2}$ в окрестности точки x_0.

Воспользуемся равенством (25) при $k = 2$. Тогда получим, что кораспределение $\mathcal{I}_1$ представимо в виде

$$\mathcal{I}_1 = \operatorname{span}\biggl\{dy^2 - \frac{y^3}{y^2}\,dy^1, \ldots, dy^{n-1} - \frac{y^n}{y^2}\,dy^1\biggr\},$$

где функции $y^1, \ldots, y^n$ независимы в окрестности точки x_0. Базис кораспределения $\mathcal{J}$ образуют базисные формы

$$\omega^2 = dy^2 - \frac{y^3}{y^2}\,dy^1, \quad \ldots, \quad \omega^{n-1} = dy^{n-1} - \frac{y^n}{y^2}\,dy^1$$

кораспределения $\mathcal{I}_1$ и ещё две формы ω^1, $\omega^n \in \mathcal{J}$ такие, что семейство $\omega^1, \ldots, \omega^n$ является линейно несвязанным в окрестности точки x_0. Пусть производные функций y^1 и y^n в силу системы (1) задаются выражениями

$$\dot{y}^1 = \tilde{\alpha}_0^0 + \tilde{\alpha}_1^0 u, \quad \dot{y}^n = \alpha_0^1 + \alpha_1^1 u.$$

Тогда формы $\omega^1 = dy^1 - (\tilde{\alpha}_0^0 + \tilde{\alpha}_1^0 u)\,dt$ и $\omega^n = dy^n - (\alpha_0^1 + \alpha_1^1 u)\,dt$ содержатся в кораспределении $\mathcal{J}$. Поскольку функции $y^1, \ldots, y^n$ независимы в окрестности точки x_0, семейство $\omega^1, \ldots, \omega^n$ является линейно несвязанным в окрестности точки x_0. Следовательно,

$$\mathcal{J} = \operatorname{span}\biggl\{dy^1 - (\tilde{\alpha}_0^0 + \tilde{\alpha}_1^0 u)\,dt, dy^2 - \frac{y^3}{y^2}\,dy^1, \ldots, dy^{n-1} - \frac{y^n}{y^2}\,dy^1, dy^n - (\alpha_0^1 + \alpha_1^1 u)\,dt\biggr\}.$$

Из условия $dy^1(x_0) \notin \mathcal{I}(x_0)$ вытекает, что функции $\tilde{\alpha}_0^0$ и $\tilde{\alpha}_1^0$ одновременно не обращаются в нуль в точке x_0.

Введём обозначения $\alpha_0^0 = \tilde{\alpha}_0^0 / y^2$, $\alpha_1^0 = \tilde{\alpha}_1^0 / y^2$ и запишем кораспределение $\mathcal{J}$ в виде

$$\mathcal{J} = \operatorname{span}\biggl\{dy^1 - y^2(\alpha_0^0 + \alpha_1^0 u)\,dt, dy^2 - \frac{y^3}{y^2}\,dy^1, \ldots, dy^{n-1} - \frac{y^n}{y^2}\,dy^1, dy^n - (\alpha_0^1 + \alpha_1^1 u)\,dt\biggr\}.$$

Изменим базис кораспределения $\mathcal{J}$, положив

$$\overline{\omega}^1 = \omega^1, \quad \overline{\omega}^i = \omega^i + \frac{y^{i+1}}{y^2}\omega^1 = dy^i - y^{i+1}(\alpha_0^0 + \alpha_1^0 u)\,dt, \quad i = \overline{2, n-1}, \quad \overline{\omega}^n = \omega^n.$$

В результате кораспределение $\mathcal{J}$ примет вид

$$\mathcal{J} = \operatorname{span}\{dy^1 - y^2(\alpha_0^0 + \alpha_1^0 u)\,dt, \ldots, dy^{n-1} - y^n(\alpha_0^0 + \alpha_1^0 u)\,dt, dy^n - (\alpha_0^1 + \alpha_1^1 u)\,dt\}.$$

Полученный результат означает, что гладкой невырожденной заменой переменных состояния $y = \Phi(x)$, задаваемой функциями $y^1, \ldots, y^n$, система (1) в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 преобразуется к виду

$$\dot{y}^1 = y^2(\alpha_0^0(x) + \alpha_1^0(x)u), \quad \ldots, \quad \dot{y}^{n-1} = y^n(\alpha_0^0(x) + \alpha_1^0(x)u), \quad \dot{y}^n = \alpha_0^1(x) + \alpha_1^1(x)u, \quad x = \Phi^{-1}(y). \tag{28}$$

Покажем, что матрица $A(x) = (\alpha_j^i(x))_{j=0,1}^{i=0,1}$ невырождена в точке x_0. Предположим, что это не так. Из равенств

$$\Phi_*|_x f_k(x) = \alpha_k^0(x) y^2(x) \frac{\partial}{\partial y^1} + \ldots + \alpha_k^0(x) y^n(x) \frac{\partial}{\partial y^{n-1}} + \alpha_k^1(x) \frac{\partial}{\partial y^n}, \quad k = 0, 1,$$

следует соотношение

$$\Phi_*|_x(\alpha_0^0(x) f_1(x) - \alpha_1^0(x) f_0(x)) = \alpha_0^0(x)\Phi_*|_x f_1(x) - \alpha_1^0(x)\Phi_*|_x f_0(x) = \det A(x) \frac{\partial}{\partial y^n}.$$

С учётом предположения $\det A(x_0) = 0$ получаем, что

$$\Phi_*|_{x_0}(\alpha_0^0(x_0) f_1(x_0) - \alpha_1^0(x_0) f_0(x_0)) = 0.$$

Поскольку Φ – диффеоморфизм, то $\alpha_0^0(x_0) f_1(x_0) - \alpha_1^0(x_0) f_0(x_0) = 0$. Ранее показано, что хотя бы одно из чисел $\alpha_0^0(x_0)$, $\alpha_1^0(x_0)$ отлично от нуля. Следовательно, векторы $f_0(x_0)$ и $f_1(x_0)$ линейно зависимы. Так как в этом случае $\dim \mathcal{I}(x_0) > n - 2$, то получено противоречие. Отсюда следует, что $\det A(x_0) \neq 0$.

Выполняя в системе (28) на множестве

$$Q_{yu} = \{(y, u) : y \in \Phi(U(x_0)), \;\; \alpha_0^0(x) + \alpha_1^0(x)u \neq 0, \;\; x = \Phi^{-1}(y)\}$$

замену независимой переменной $\dot{\tau} = \alpha_0^0(x) + \alpha_1^0(x)u$, где $x = \Phi^{-1}(y)$, и замену управления $v = (\alpha_0^1(x) + \alpha_1^1(x)u)/(\alpha_0^0(x) + \alpha_1^0(x)u)$, где $x = \Phi^{-1}(y)$, получаем линейную управляемую систему (3), определённую на множестве

$$Q_{yv} = \{(y, v) : y \in \Phi(U(x_0)), \;\; \alpha_1^1(x) - \alpha_1^0(x)v \neq 0, \;\; x = \Phi^{-1}(y)\}.$$

Таким образом, система (1) A-орбитально линеаризуема в окрестности $U(x_0)$ точки x_0.

Необходимость. A-орбитальная линеаризуемость системы (1) в окрестности $U(x_0)$ регулярной точки x_0 производного ряда (19) означает существование матрицы (5), невырожденной в точке x_0, и диффеоморфизма $\Phi : U(x_0) \to P$ таких, что система (1) заменой независимой переменной (6), заменой управления (7) и заменой состояния $y = \Phi(x)$ преобразуется на множестве $Q_{xu} = \{(x, u) : x \in U(x_0), \;\alpha_0^0(x) + \alpha_1^0(x)u \neq 0\}$ в линейную управляемую систему (3), определённую на множестве $Q_{yv} = \{(y, v) : y \in P, \;\alpha_1^1(x) - \alpha_1^0(x)v \neq 0, \;x = \Phi^{-1}(y)\}$.

Нетрудно видеть, что в этом случае заменой состояния $y = \Phi(x)$ система (1) преобразуется на множестве $U(x_0)$ в аффинную систему (28). Системе (28) соответствуют векторные поля

$$h_k = y^2 \alpha_k^0(\Phi^{-1}(y)) \frac{\partial}{\partial y^1} + \ldots + y^n \alpha_k^0(\Phi^{-1}(y)) \frac{\partial}{\partial y^{n-1}} + \alpha_k^1(\Phi^{-1}(y)) \frac{\partial}{\partial y^n}, \quad k = 0, 1,$$

и система Пфаффа

$$dy^j - y^{j+1}(\alpha_0^0(\Phi^{-1}(y)) + \alpha_1^0(\Phi^{-1}(y))u)\,dt = 0, \quad j = \overline{1, n-1},$$

$$dy^n - (\alpha_0^1(\Phi^{-1}(y)) + \alpha_1^1(\Phi^{-1}(y))u)\,dt = 0.$$

Эта система Пфаффа порождает кораспределение $\mathcal{J}=\operatorname{span}\{\tilde\omega^1,\ldots,\tilde\omega^n\}$, где

$$\tilde\omega^j = dy^j - y^{j+1}(\alpha_0^0(\Phi^{-1}(y))+\alpha_1^0(\Phi^{-1}(y))u)\,dt,\quad j=\overline{1,n-1},$$

$$\tilde\omega^n = dy^n - (\alpha_0^1(\Phi^{-1}(y))+\alpha_1^1(\Phi^{-1}(y))u)\,dt.$$

Построим кораспределение $\mathcal{I}=\operatorname{span}\{\omega\in\mathcal{J}:\omega(h_0)=0,\omega(h_1)=0\}$. Будем искать формы из $\mathcal{J}$, принадлежащие кораспределению $\mathcal{I}$, в виде $\omega=\beta_j\tilde\omega^j$, где функции $\beta_1,\ldots,\beta_n$ подлежат определению. Из условий $\omega(h_0)=0$, $\omega(h_1)=0$ получаем систему уравнений

$$y^2\alpha_k^0(\Phi^{-1}(y))\beta_1+\ldots+y^n\alpha_k^0(\Phi^{-1}(y))\beta_{n-1}+\alpha_k^1(\Phi^{-1}(y))\beta_n=0,\quad k=0,1.$$

Свойство регулярности производного ряда (19) инвариантно по отношению к диффеоморфизмам пространства состояний, поэтому кораспределение $\mathcal{I}$ регулярно в окрестности точки $y_0=\Phi(x_0)$. Следовательно, ранг матрицы

$$B(y)=\begin{pmatrix} y^2\alpha_0^0(\Phi^{-1}(y)) & \ldots & y^n\alpha_0^0(\Phi^{-1}(y)) & \alpha_0^1(\Phi^{-1}(y))\\ y^2\alpha_1^0(\Phi^{-1}(y)) & \ldots & y^n\alpha_1^0(\Phi^{-1}(y)) & \alpha_1^1(\Phi^{-1}(y))\end{pmatrix}$$

постоянен в некоторой окрестности точки y_0. Из неравенства $\det A(x_0)\neq 0$ следует, что ранг матрицы $B(y)$ может быть постоянным в окрестности точки y_0 только в случае, если он равен двум и хотя бы одно из чисел $y_0^2,\ldots,y_0^n$ отлично от нуля.

Покажем, что из регулярности производного ряда кораспределения $\mathcal{I}$ вытекает неравенство $y_0^2\neq 0$. Предположим противное, и пусть $i\in\{3,\ldots,n\}$ – наименьший на множестве $\{2,\ldots,n\}$ номер, для которого $y_0^i\neq 0$. В этом случае базисным семейством кораспределения $\mathcal{I}$ являются формы

$$\omega^1=y^i\,dy^1-y^2\,dy^{i-1},\quad\ldots,\quad \omega^{i-2}=y^i\,dy^{i-2}-y^{i-1}\,dy^{i-1},$$

$$\omega^{i-1}=y^i\,dy^i-y^{i+1}\,dy^{i-1},\quad\ldots,\quad \omega^{n-2}=y^i\,dy^{n-1}-y^n\,dy^{i-1},$$

а само кораспределение $\mathcal{I}$ имеет вид $\mathcal{I}=\operatorname{span}\{\omega^1,\ldots,\omega^{n-2}\}$. Построим производный ряд кораспределения $\mathcal{I}$ в окрестности точки y_0. Покажем, используя индукцию, что выполнены равенства

$$\mathcal{I}_k=\operatorname{span}\{\omega^1,\ldots,\omega^{n-k-1}\},\quad k=\overline{1,n-i+1}.\tag{29}$$

Для $k=1$ это уже установлено. Предположим, что для некоторого номера $k\in\{1,\ldots,n-i\}$ кораспределение $\mathcal{I}_k$ представлено в виде $\mathcal{I}_k=\operatorname{span}\{\omega^1,\ldots,\omega^{n-k-1}\}$. Найдём кораспределение $\mathcal{I}_{k+1}$. Для этого вычислим внешние дифференциалы форм $\omega^1,\ldots,\omega^{n-k-1}$:

$$\begin{gathered} d\omega^1=dy^i\wedge dy^1+dy^{i-1}\wedge dy^2,\quad\ldots,\quad d\omega^{i-2}=dy^i\wedge dy^{i-2},\\ d\omega^{i-1}=dy^{i-1}\wedge dy^{i+1},\quad\ldots,\quad d\omega^{n-k-1}=dy^i\wedge dy^{n-k}+dy^{i-1}\wedge dy^{n-k+1}.\end{gathered}\tag{30}$$

Нетрудно видеть, что

$$d\omega^j\equiv 0 \mod \mathcal{I}_k,\quad j=\overline{1,n-k-2},\quad d\omega^{n-k-1}\equiv dy^{i-1}\wedge dy^{n-k+1} \mod \mathcal{I}_k,$$

поэтому кораспределение $\mathcal{I}_{k+1}$ порождается формами $\omega^1,\ldots,\omega^{n-k-2}$. Тем самым доказаны равенства (29).

При $k=n-i+1$ получаем

$$\mathcal{I}_{n-i+1}=\operatorname{span}\{\omega^1,\ldots,\omega^{i-2}\}=\operatorname{span}\{y^idy^1-y^2dy^{i-1},\ldots,y^idy^{i-2}-y^{i-1}dy^{i-1}\}.$$

Поскольку $i > 2$, то $\dim \mathcal{I}_{n-i+1} > 0$, а значит, имеет смысл задача нахождения следующего элемента производного ряда – кораспределения $\mathcal{I}_{n-i+2}$. Будем искать формы из $\mathcal{I}_{n-i+1}$, принадлежащие кораспределению $\mathcal{I}_{n-i+2}$, в виде $\omega = \beta_j \omega^j$, $j = \overline{1, i-2}$. Из соотношений (30) следует, что

$$d\omega^1 \equiv dy^i \wedge dy^1 \mod \mathcal{I}_{n-i+1}, \quad \ldots, \quad d\omega^{i-2} \equiv dy^i \wedge dy^{i-2} \mod \mathcal{I}_{n-i+1},$$

поэтому равенство $\beta_j d\omega^j \wedge \omega^1 \wedge \ldots \wedge \omega^{i-2} = 0$ приводит к уравнению

$$\beta_1 y^2 + \ldots + \beta_{i-3} y^{i-2} + \beta_{i-2} y^{i-1} = 0.$$

Согласно предположению, $y_0^2 = \ldots = y_0^{i-1} = 0$, поэтому ранг матрицы $(y^2 \ \ldots \ y^{i-1})$ является переменным в любой окрестности точки y_0. Отсюда следует, что кораспределение $\mathcal{I}_{n-i+2}$ нерегулярно в окрестности точки y_0. Из полученного противоречия вытекает, что $y_0^2 \neq 0$. Производный кофлаг кораспределения $\mathcal{I}$, таким образом, принимает вид

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I}_1 = \operatorname{span}\{y^2\, dy^2 - y^3\, dy^1, y^2\, dy^3 - y^4\, dy^1, \ldots, y^2\, dy^{n-1} - y^n\, dy^1\},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\mathcal{I}_{n-3} = \operatorname{span}\{y^2\, dy^2 - y^3\, dy^1, y^2\, dy^3 - y^4\, dy^1\},\\
&\mathcal{I}_{n-2} = \operatorname{span}\{y^2\, dy^2 - y^3\, dy^1\},\\
&\mathcal{I}_{n-1} = \mathcal{O}.
\end{aligned} \tag{31}$$

Нетрудно видеть, что длина N производного кофлага (31) равна $n-1$, а характеристическое кораспределение $\mathcal{CI}_{n-2}$ кораспределения $\mathcal{I}_{n-2}$ имеет вид $\mathcal{CI}_{n-2} = \operatorname{span}\{dy^1, dy^2, dy^3\}$. Из неравенства $y_0^2 \neq 0$ вытекает, что $dy^1 \notin \mathcal{I}_1(y_0) = \mathcal{I}(y_0)$. Следовательно, $\mathcal{CI}_{n-2}(y_0) \not\subset \mathcal{I}(y_0)$.

Таким образом, установлены следующие свойства производного кофлага (31):

а) в некоторой окрестности точки y_0 выполнено равенство $N = n-1$;

б) $\mathcal{CI}_{n-2}(y_0) \not\subset \mathcal{I}(y_0)$.

Свойства а) и б) инвариантны относительно диффеоморфизмов пространства состояний, поэтому элементы производного кофлага (20), построенного для системы (1), удовлетворяют условиям 1) и 2). Теорема доказана.

Замечание. Пусть x_0 – регулярная точка производного ряда (19) и выполнены условия 1) и 2) теоремы. Как показано в доказательстве достаточности, в этом случае существуют такие функции y^1, y^2, y^3, независимые в окрестности точки x_0, для которых $dy^1(x_0) \notin \mathcal{I}(x_0)$, $y^2(x_0) \neq 0$ и кораспределение $\mathcal{I}_{n-2}$ представимо в виде (24). Из условия $dy^1(x_0) \notin \mathcal{I}(x_0)$ следует, что хотя бы для одного индекса $l \in \{0, 1\}$ выполнено неравенство $dy^1(f_l)(x_0) \neq 0$. Покажем, что функции $y^4, \ldots, y^n$, задающие совместно с y^1, y^2, y^3 линеаризующий диффеоморфизм Φ, можно найти по формулам

$$y^{n-k+2} = \frac{dy^{n-k+1}(f_l)}{dy^1(f_l)} y^2, \quad k = n-2, \ldots, 2. \tag{32}$$

В доказательстве достаточности теоремы показано, что кораспределение $\mathcal{I}_{k-1}$ представимо в виде (25). Поскольку $\omega^{n-k+1} \in \mathcal{I}_{k-1} \subset \mathcal{I}$, то $\omega^{n-k+1}(f_l) = 0$ в окрестности точки x_0. Это означает, что

$$dy^{n-k+1}(f_l) - \frac{y^{n-k+2}}{y^2} dy^1(f_l) = 0.$$

Так как $dy^1(f_l)(x_0) \neq 0$, то, выражая из этого соотношения функцию y^{n-k+2}, придём к формулам (32).

4. Алгоритм линеаризации. Доказательство достаточности в теореме конструктивно: из него и из приведённого выше замечания вытекает алгоритм построения линеаризующего преобразования для системы (1) в окрестности регулярной точки x_0 производного ряда (19). Опишем этот алгоритм.

Составим систему Пфаффа (17), ассоциированную с системой (1). Построим кораспределение $\mathcal{I}$ и его производный ряд (19). Убедимся, что x_0 – регулярная точка ряда (19). Проверим, чему равна длина N производного кофлага (20). Если $N \neq n-1$, то система (1) не допускает A-орбитальную линеаризацию в окрестности точки x_0. В противном случае составляем характеристическую систему (16) для кораспределения $\mathcal{I}_{n-2}$, исключаем из неё функцию λ и интегрируем полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. В результате найдём полную систему из трёх независимых интегралов z^1, z^2, z^3 кораспределения $\mathcal{CI}_{n-2}$, с помощью которых кораспределения $\mathcal{CI}_{n-2}$ и $\mathcal{I}_{n-2}$ запишутся в виде $\mathcal{CI}_{n-2} = \operatorname{span}\{dz^1, dz^2, dz^3\}$, $\mathcal{I}_{n-2} = \operatorname{span}\{dz^1 - z^2 dz^3\}$. Если $\mathcal{CI}_{n-2}(x_0) \subset \mathcal{I}(x_0)$, то система (1) не допускает A-орбитальную линеаризацию в окрестности точки x_0. В противном случае A-орбитальная линеаризация системы (1) в окрестности точки x_0 возможна. Для построения линеаризующего преобразования найдём функции y^1, y^2, y^3 по формулам (23), где $\overline{z}^1$, $\overline{z}^2$, $\overline{z}^3$ задаются выражениями (21) и (22). Выберем среди векторных полей f_0 и f_1 такое поле f_l, для которого выполнено неравенство $dy^1(f_l)(x_0) \neq 0$, и определим функции $y^4, \ldots, y^n$ по формулам (32). Вычислим производные функций y^1 и y^n в силу системы (1): $\dot{y}^1 = \tilde{\alpha}_0^0 + \tilde{\alpha}_1^0 u$, $\dot{y}^n = \alpha_0^1 + \alpha_1^1 u$, и положим

$$\alpha_0^0 = \tilde{\alpha}_0^0 / y^2, \quad \alpha_1^0 = \tilde{\alpha}_1^0 / y^2.$$

Согласно доказанной теореме, существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что заменой независимой переменной $\dot{\tau} = \alpha_0^0(x) + \alpha_1^0(x)u$, заменой управления $v = (\alpha_0^1(x) + \alpha_1^1(x)u)/(\alpha_0^0(x) + \alpha_1^0(x)u)$ и заменой состояния $y = \Phi(x)$, задаваемой функциями $y^1, \ldots, y^n$, система (1) преобразуется на множестве $Q_{xu} = \{(x,u) : x \in U(x_0),\ \alpha_0^0(x) + \alpha_1^0(x)u \neq 0\}$ в линейную управляемую систему (3), определённую на множестве $Q_{yv} = \{(y,v) : y \in \Phi(U(x_0)),\ \alpha_1^1(x) - \alpha_1^0(x)v \neq 0,\ x = \Phi^{-1}(y)\}$.

Отметим, что интегралы z^1, z^2, z^3 характеристического кораспределения $\mathcal{CI}_{n-2}$, с помощью которых кораспределение $\mathcal{I}_{n-2}$ записывается в виде $\mathcal{I}_{n-2} = \operatorname{span}\{dz^1 - z^2 dz^3\}$, могут быть выбраны не единственным способом. В связи с этим не является единственным и преобразование, приводящее систему (1) к виду (3).

5. Пример. Покажем, что система

$$\begin{aligned} &\dot{x}^1 = -x^2 x^5 + x^2 u, \quad \dot{x}^2 = -x^3 x^5 + (x^5)^3 + (x^3 - (x^5)^2)u, \\ &\dot{x}^3 = 2x^1 x^5 - x^4 x^5 + x^4 u, \quad \dot{x}^4 = -(x^5)^2 + x^5 u, \quad \dot{x}^5 = x^1 \end{aligned} \tag{33}$$

является A-орбитально линеаризуемой в окрестности любой точки $x_0 \in D = \{x \in \mathbb{R}^5 : x^1 \neq 0, x^2 \neq 0\}$, и построим линеаризующее преобразование.

Система Пфаффа, ассоциированная с системой (33), имеет вид

$$dx^1 + x^2 x^5\, dt - x^2 u\, dt = 0, \quad dx^2 + x^3 x^5\, dt - (x^5)^3\, dt - (x^3 - (x^5)^2) u\, dt = 0,$$
$$dx^3 - 2x^1 x^5\, dt + x^4 x^5\, dt - x^4 u\, dt = 0, \quad dx^4 + (x^5)^2\, dt - x^5 u\, dt = 0, \quad dx^5 - x^1\, dt = 0.$$

Исключив dt и $u\,dt$ из этой системы, получим систему Пфаффа

$$x^2\, dx^2 - (x^3 - (x^5)^2)\, dx^1 = 0, \quad x^2\, dx^3 - 2x^2 x^5\, dx^5 - x^4\, dx^1 = 0, \quad x^2\, dx^4 - x^5\, dx^1 = 0.$$

Она порождает кораспределение

$$\mathcal{I} = \operatorname{span}\{x^2\, dx^2 - (x^3 - (x^5)^2)\, dx^1, x^2\, dx^3 - 2x^2 x^5\, dx^5 - x^4\, dx^1, x^2\, dx^4 - x^5\, dx^1\}.$$

Построим производный ряд (19) для кораспределения $\mathcal{I}$ в окрестности точки x_0. Непосредственные вычисления показывают, что x_0 – регулярная точка производного ряда (19), а сам производный ряд имеет вид

$$\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}, \quad \mathcal{I}_2 = \operatorname{span}\{x^2 dx^2 - (x^3 - (x^5)^2)\, dx^1, x^2\, dx^3 - 2x^2 x^5\, dx^5 - x^4\, dx^1\},$$

$$\mathcal{I}_3 = \operatorname{span}\{x^2\,dx^2 - (x^3 - (x^5)^2)\,dx^1\}, \quad \mathcal{I}_4 = \mathcal{O}.$$

Как видим, равенство $N = 4$ выполнено. Базисной формой кораспределения $\mathcal{I}_3$ является форма $\omega = x^2 dx^2 - (x^3 - (x^5)^2)dx^1$. Характеристическая система (16) кораспределения $\mathcal{I}_3$ образована уравнениями

$$-dx^3 + 2x^5\,dx^5 = (x^3 - (x^5)^2)\lambda, \quad 0 = x^2\lambda, \quad dx^1 = 0,$$

$$-2x^5\,dx^1 = 0, \quad x^2 dx^2 - (x^3 - (x^5)^2)\,dx^1 = 0.$$

Поскольку в окрестности точки x_0 выполнено неравенство $x^2 \neq 0$, то $\lambda = 0$ и характеристическая система сводится к системе из трёх уравнений:

$$-dx^3 + 2x^5\,dx^5 = 0, \quad dx^1 = 0, \quad dx^2 = 0.$$

Интегрируя эту систему, находим три независимых интеграла характеристического кораспределения $\mathcal{CI}_3$:

$$z^1 = x^2, \quad z^2 = \frac{x^3 - (x^5)^2}{x^2}, \quad z^3 = x^1,$$

с помощью которых кораспределение $\mathcal{CI}_3$ запишется в виде $\mathcal{CI}_3 = \operatorname{span}\{dz^1, dz^2, dz^3\}$, а кораспределение $\mathcal{I}_3$ – в виде $\mathcal{I}_3 = \operatorname{span}\{dz^1 - z^2 dz^3\}$. Так как $dz^3 = dx^1$ и $x_0^2 \neq 0$, то $dz^3(x_0) \notin \mathcal{I}(x_0)$ и, следовательно, $\mathcal{CI}_3(x_0) \not\subset \mathcal{I}(x_0)$.

Построим линеаризующее преобразование. Согласно формулам (23), полагаем $y^1 = x^1$, $y^2 = x^2$, $y^3 = x^3 - (x^5)^2$. Системе (33) соответствуют векторные поля

$$f_0 = -x^2x^5\frac{\partial}{\partial x^1} + (-x^3x^5 + (x^5)^3)\frac{\partial}{\partial x^2} + (2x^1x^5 - x^4x^5)\frac{\partial}{\partial x^3} - (x^5)^2\frac{\partial}{\partial x^4} + x^1\frac{\partial}{\partial x^5},$$

$$f_1 = x^2\frac{\partial}{\partial x^1} + (x^3 - (x^5)^2)\frac{\partial}{\partial x^2} + x^4\frac{\partial}{\partial x^3} + x^5\frac{\partial}{\partial x^4}.$$

Так как $dy^1(f_1) = x^2$, то $dy^1(f_1)(x_0) \neq 0$. Выбирая в качестве поля f_l в формулах (32) поле f_1, находим функции y^4 и y^5:

$$y^4 = \frac{dy^3(f_1)}{dy^1(f_1)}y^2 = x^4, \quad y^5 = \frac{dy^4(f_1)}{dy^1(f_1)}y^2 = x^5.$$

Найдём производные функций y^1 и y^5 в силу системы (33): $\dot{y}^1 = -x^2x^5 + x^2u$, $\dot{y}^5 = x^1$ и положим

$$\alpha_0^0 = \frac{-x^2x^5}{y^2} = -x^5, \quad \alpha_1^0 = \frac{x^2}{y^2} = 1, \quad \alpha_0^1 = x^1, \quad \alpha_1^1 = 0.$$

Согласно доказанной теореме, существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0 такая, что система (33) заменой независимой переменной $\dot{\tau} = -x^5 + u$, заменой управления $v = x^1/(-x^5 + u)$ и заменой состояния

$$\Phi: \quad y^1 = x^1, \quad y^2 = x^2, \quad y^3 = x^3 - (x^5)^2, \quad y^4 = x^4, \quad y^5 = x^5$$

преобразуется на множестве $Q_{xu} = \{(x,u) : x \in U(x_0),\ u - x^5 \neq 0\}$ в линейную управляемую систему

$$(y^1)' = y^2, \quad (y^2)' = y^3, \quad (y^3)' = y^4, \quad (y^4)' = y^5, \quad (y^5)' = v, \tag{34}$$

определённую на множестве $Q_{yv} = \{(y,v) : y \in \Phi(U(x_0)),\ v \neq 0\}$.

Поскольку отображение $\Phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ является диффеоморфизмом, то справедливо более сильное утверждение: указанными заменами система (33) преобразуется на множестве $M_{xu} = \{(x,u) : x^1 \neq 0,\ u - x^5 \neq 0\}$ в линейную управляемую систему (34), определённую на множестве $M_{yv} = \{(y,v) : y^1 \neq 0,\ v \neq 0\}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 17-07-00653, 16-07-01153).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jakubczyk B., Respondek W.* On linearization of control systems // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Math. 1980. V. 28. P. 517–522.
2. *Gardner R.B., Shadwick W.F.* The GS algorithm for exact linearization to Brunovsky normal form // IEEE Trans. Automat. Control. 1992. V. 37. № 2. P. 224–230.
3. *Елкин В.И.* Редукция нелинейных управляемых систем. Дифференциально-геометрический подход. М., 1997.
4. *Краснощеченко В.И., Крищенко А.П.* Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза. М., 2005.
5. *Sampei M., Furuta K.* On time scaling for nonlinear systems: application to linearization // IEEE Trans. Automat. Control. 1986. V. 31. P. 459–462.
6. *Respondek W.* Orbital feedback linearization of single-input nonlinear control systems // Proc. of IFAC NOLCOS'98. 1998. P. 499–504.
7. *Guay M.* An algorithm for orbital feedback linearization of single-input control affine systems // Systems and Control Letters. 1999. V. 38. № 4–5. P. 271–281.
8. *Li S.-J., Respondek W.* Orbital feedback linearization for multi-input control systems // Intern. J. of Robust and Nonlin. Control. 2015. V. 25. P. 1352–1378.
9. *Фетисов Д.А.* Линеаризация аффинных систем на основе замен независимой переменной, зависящих от управления // Дифференц. уравнения. 2017. Т. 53. № 11. С. 1514–1525.
10. *Рашевский П.К.* Геометрическая теория уравнений с частными производными. М., 1947.

Московский государственный технический
университет им. Н.Э. Баумана

Поступила в редакцию
08.05.2018 г.